3.Электромагнитная индукция.

3.1.Основные теоретические сведения.

Явление электромагнитной индукции, открытое английским физиком М. Фарадеем в 1831 г., описывается следующим законом (**закон Фарадея**): в замкнутом проводящем контуре C при изменении во времени магнитного потока Φ, охватываемого этим контуром, возникает электрический (индукционный) ток. Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через произвольную поверхность S, ограниченную контуром *С*, равен по определению $\Phi = \int\limits_S (\vec{B}, d\vec{S})$, где под знаком интеграла записано скалярное произведение вектора магнитной индукции $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$ на вектор элементарной площадки рассматриваемой поверхности $d\vec{S} = \vec{n} dS$, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к площадке dS, направление которого выбирается до вычисления интеграла. Появление индукционного тока I обусловлено возникновением *Э.D.C.* индукции – скалярной величины, которая пропорциональна скорости изменения магнитного потока Φ сквозь поверхность S, натянутую на контур *С*:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{3.1}$$

Э.D.C. электромагнитной индукции не зависит от того, чем именно вызвано изменение магнитного потока – деформацией контура, его перемещением в магнитном поле или изменением самого поля с течением времени или совокупностью перечисленных факторов. Обратим внимание на тот факт, что полная производная в законе (3.1) автоматически учитывает все перечисленные выше, независимые друг от друга причины, которые приводят к появлению *Э.D.C.* индукции [4,5]. Выявление физического смысла знака алгебраической величины *Э.D.C.* индукции в законе (3.1) требует особого обсуждения.

Профессор Петербургского университета Э.Х. Ленц исследовал связь между направлением индукционного тока и характером вызвавшего его изменения магнитного потока. В 1833 г. он установил следующий закон: при всяком изменении магнитного потока Φ сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока (**правило Ленца**). Поэтому знак минус в правой части уравнения (3.1) соответствует правилу Ленца. Таким образом, соотношение (3.1) объединяющее в себе закон Фарадея и правило Ленца, является математическим выражением **основного закона электромагнитной индукции**.

В физике принята правая система координат. Поэтому при практическом использовании закона электромагнитной индукции направление обхода контура при вычислении $\mathcal{E}_i$ и направление нормали $\vec{n}$ при вычислении магнитного потока Φ, сцеплённого с контуром, должны быть согласованы по правилу правого винта: из конца вектора $\vec{n}$ обход контура должен быть виден происходящим против часовой стрелки. Поэтому, выбирая (произвольно) определённое положительное направление нормали, мы определяем и положительное направление обхода контура, что даёт возможность определить как знак потока вектора магнитной индукции (скалярное произведение векторов), так и *Э.D.C.* индукции в контуре, что позволяет выразить *Э.D.C.* индукции и по модулю, и по знаку соотношением (3.1).

Представляет интерес максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции. Дж. К. Максвелл исследовал вопрос возникновения *Э.D.C.* индукции и, как следствие, появление индукционного тока I в неподвижном проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Вопрос состоял в том, какая же сила возбуждает индукционный ток в этом случае? Ответ был найден Максвеллом. Согласно Максвеллу, всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Последнее и является причиной возникновения индукционного тока в проводящем контуре. Максвеллу принадлежит следующая углублённая формулировка **закона электромагнитной индукции:**

всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле; циркуляция вектора напряжённости $\vec{E}$ этого поля по любому неподвижному замкнутому контуру C определяется выражением

$$\oint_C (\vec{E}, d\vec{l}\,) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \;, \qquad (3.2)$$

где Φ – магнитный поток через поверхность, натянутую на контур C. Для обозначения скорости изменения магнитного потока в соотношении (3.2) использован знак частной, а не полной производной, и этим подчёркивается тот факт, что контур должен быть неподвижным.

Между максвелловым и фарадеевым пониманием явления электромагнитной индукции имеется существенное различие. Согласно Фарадею, электромагнитная индукция состоит в возбуждении электрического тока. Для её наблюдения необходимо наличие замкнутого проводника. По Максвеллу сущность электромагнитной индукции состоит прежде всего в возбуждении электрического поля, а не тока. Электромагнитная индукция может наблюдаться и тогда, когда в пространстве вообще нет никаких проводников. Появление индукционного тока в замкнутом проводнике при внесении последнего в переменное магнитное поле есть лишь одно из проявлений электрического поля $\vec{E}$, возникшего в результате изменения поля магнитного. Но поле $\vec{E}$ может производить и другие действия, например, поляризовать диэлектрик, вызвать пробой конденсатора, ускорять и тормозить заряженные частицы и т.п. Оно может вызвать электрический ток и в незамкнутом проводнике [2].

Максвеллова формулировка закона электромагнитной индукции более общая, чем формулировка Фарадея. Она принадлежит к числу наиболее важных обобщений электродинамики. Математически закон индукции в понимании Максвелла выражается формулой (3.2), где C – произвольный замкнутый контур, который может быть проведён и в диэлектрике, а не обязательно в проводнике, как было у Фарадея. Магнитный поток Φ определяется интегралом

$$\Phi = \oint_S (\vec{B}, d\vec{S}), \qquad (3.3)$$

взятым по произвольной поверхности S, натянутой на контур C. Поэтому соотношение (3.2) можно представить в виде

$$\oint_C (\vec{E}, d\vec{l}\,) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right). \qquad (3.4)$$

Математическая структура уравнения (3.4) такова, что оно может быть преобразовано в дифференциальную форму. В результате такого преобразования получится

$$\mathbf{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (3.5)$$

Это – дифференциальная форма закона электромагнитной индукции. Уравнение (3.4) или эквивалентное ему уравнение (3.5) – одно из основных соотношений теории электромагнитного поля. Оно входит в систему уравнений Максвелла.

В электростатике источниками электрического поля являются неподвижные электрические заряды. Для такого поля интеграл $\oint\limits_C (\vec{E}, d\vec{l})$ обращается в нуль по любому замкнутому контуру. По этой причине одно только электростатическое поле не может обеспечить непрерывное течение электричества вдоль замкнутых проводов. Напротив, электрическое поле, возбуждаемое магнитным полем, меняющимся во времени, - не потенциальное, а вихревое. Ротор напряжённости электрического поля $\vec{E}$ и его циркуляция, вообще говоря, отличны от нуля. Благодаря этому вихревое электрическое поле, без каких бы то ни было добавочных сил, может вызвать непрерывное течение электрического заряда по замкнутым проводам. Это течение и наблюдается в виде индукционных токов [4].

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий натянутую на контур поверхность. В частности, этот поток может создаваться током, текущим в самом рассматриваемом контуре. Поэтому при всяком изменении силы тока в каком-либо контуре в нём возникает *Э.Д.С.* индукции, которая вызывает дополнительный ток в контуре. Это явление называется самоиндукцией, а возникающая *Э.Д.С.* $\mathcal{E}_{si}$ - электродвижущей силой самоиндукции.

Рассмотрим вопрос, от чего зависит *Э.Д.С.* самоиндукции. Пусть жёсткий контур находится в вакууме или в среде, магнитные свойства которой не зависят от магнитного поля. Магнитная индукция (по закону Био-Савара-Лапласа, который сохраняет силу в квазистационарных процессах, когда частота колебаний электромагнитного поля достаточно мала), а значит и полный магнитный поток Φ

поля $\vec{B}$ через поверхность, ограниченную контуром *C*, будут пропорциональны силе тока I:

$$\Phi = LI\,. \tag{3.6}$$

Коэффициент пропорциональности в соотношении (3.6) между током I контура и магнитным потоком Φ, создаваемым собственным магнитным полем, называется индуктивностью L контура. Индуктивность L какого-либо контура зависит от его формы и размеров, а также от свойств окружающей среды.

Применяя к явлению самоиндукции основной закон электромагнитной индукции, получаем для *Э.D.C.* самоиндукции выражение

$$\mathcal{E}_{si} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI). \tag{3.7}$$

Если контур жёсткий и находится в вакууме или в среде, магнитные свойства которой не зависят от магнитного поля, то при изменении силы тока I в контуре индуктивность L остаётся постоянной, и тогда выражение для *Э.D.C.* самоиндукции принимает вид:

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{3.8}$$

В противном случае, когда последнее условие не имеет места (например, пространство, в котором расположен контур, содержит ферромагнетики), индуктивность контура зависит от силы тока, генерирующего магнитное поле, и при меняющемся токе изменяется со временем. В этом случае *Э.D.C.* самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_{si} = -(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}). \tag{3.9}$$

Знак минус в уравнении (3.9) показывает, что $\mathcal{E}_{si}$ всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока – в соответствии с правилом Ленца. Эта *Э.D.C.* стремится сохранить ток неизменным: когда ток уменьшается, она его поддерживает, а когда увеличивается – она ему противодействует.

3.2. Методические рекомендации к решению задач по теме “Электромагнитная индукция”.

Решения предлагаемых задач сводятся к расчёту разветвлённых цепей, содержащих сопротивления, ёмкости и индуктивности. Если в предлагаемых задачах содержится всего один контур, то принципиально это не повлияет на методику решения задачи. Сам расчёт цепей состоит из нахождения токов в отдельных её ветвях, зарядов конденсаторов и их полярности, скорости движения подвижной перемычки, входящей в состав рассматриваемой цепи. Для этого необходимо, в частности, воспользоваться двумя законами Кирхгофа и вторым законом динамики Ньютона. При составлении уравнения движения перемычки с током в магнитном поле необходимо учесть действующую на неё помимо других сил силу Ампера.

Согласно первому правилу Кирхгофа, алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле цепи, равна нулю.

$$\sum_k I_k = 0. \qquad (3.10)$$

Физический смысл первого правила Кирхгофа: узел электрической цепи по определению не обладает электрической ёмкостью, т.е. способностью накапливать электрический заряд, поэтому весь поступающий в узел электрический заряд должен его покинуть.

При составлении уравнений по первому правилу Кирхгофа сначала произвольно выбирают направления токов во всех узлах цепи, при этом токи, идущие к узлу, и токи, исходящие из узла, следует считать величинами разных знаков, например: первые – положительными, вторые – отрицательными или наоборот, а затем, непосредственно следуя соотношению (3.10), записывают само уравнение.

Второе правило Кирхгофа справедливо для любого выделяемого в цепи замкнутого контура: алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках произвольного замкнутого контура на их сопротивления соответственно, плюс алгебраическая сумма падений напряжений на конденсаторах, находящихся в отдельных участках цепи рассматриваемого замкнутого контура, равна алгебраической сумме *Э.D.C.*, действующих в этом контуре:

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_j I_j R_j + \sum_m \frac{q_m}{C_m}. \tag{3.11}$$

Здесь под $\mathcal{E}_i$ понимаются все возможные *Э.D.C.*, обусловленные различными источниками сторонних сил (например: химическими реакциями, силами Лоренца, вихревым электрическим полем и т.д.). Следует заметить, что при практическом использовании соотношения (3.11) надо сначала выбрать положительное направление обхода по контуру, что определяет знаки слагаемых в обеих частях этого уравнения. Кроме того, если возникает необходимость использовать величину $\frac{d\Phi}{dt}$, то в этом случае надо согласовывать направление обхода по контуру с выбранным ранее направлением нормали $\vec{n}$ к плоскости, ограниченной контуром. Когда направление обхода контура и направление нормали $\vec{n}$ связаны правилом правого винта, то $\mathcal{E}_i$ в левую часть соотношения (3.11) входит со знаком плюс и в свою очередь определяется законом $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Отдельно подробнее рассмотрим влияние на электрическую цепь *Э.D.C.* самоиндукции катушки индуктивности $\mathcal{E}_{si} = -L \ dI/dt$, где L – индуктивность катушки как элемента цепи. Если электрическая цепь в задаче домашнего задания содержит катушку с индуктивностью L, то по схеме, как правило, неизвестно направление намотки витков катушки относительно выбранного ранее положительного направления обхода контура (правое или левое), тем более что для одной и той же катушки, рассматриваемой как элемент одного или другого контура, это направление может быть различным. Последнее представляет определённые трудности при использовании закона $\mathcal{E}_{si} = -L \ dI/dt$ в левой части соотношения (3.11).

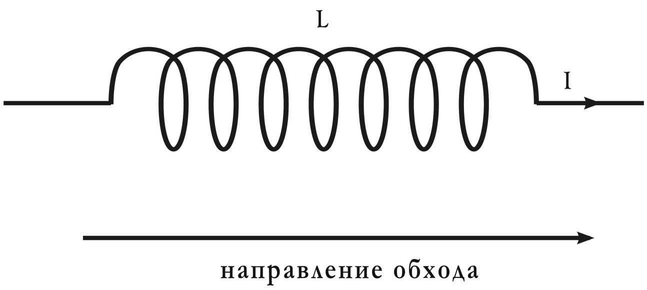

Рис.3.1.

Рассмотрим правило использования данного закона в двух возможных случаях сочетания выбранного ранее направления тока на участке цепи с индуктивностью L и положительного направления обхода по рассматриваемому контуру. Первый случай (рис.3.1): направление тока I и положительное направление обхода по контуру совпадают, следовательно,

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Тогда *Э.D.C.* самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$ в левую часть соотношения (3.11) входит со знаком плюс: ($+\mathcal{E}_{si}$), а последняя определяется законом $\mathcal{E}_{si} = -L \;\; dI/dt$.

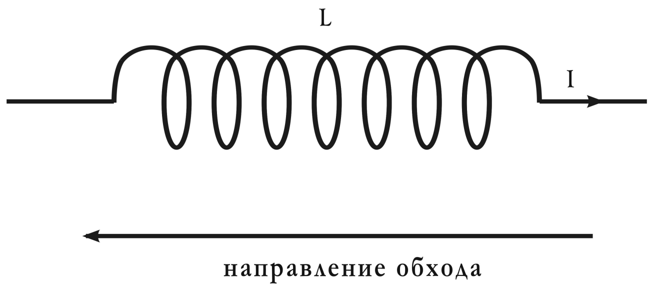

Рис. 3.2.

Второй случай (рис.3.2): направление тока I и положительное направление обхода по контуру противоположны, следовательно, $\Rightarrow$ - $\mathcal{E}_{si} = -(-L\frac{dI}{dt}) = L\frac{dI}{dt}$.

Здесь *Э.D.C.* самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$ в левую часть соотношения (3.11) входит со знаком минус: ($-\mathcal{E}_{si}$).

Формально в идее этого правила можно увидеть некоторую аналогию с правилом знаков для первого слагаемого $\sum_j I_j R_j$ в соотношении (3.11): если направление тока на участке цепи с R_j и положительное направление обхода совпадают, то произведение $I_j R_j$ считается положительным, а если нет – то отрицательным. Итак, сумма *Э.D.C.* по замкнутому контуру включает в себя и *Э.D.C.* самоиндукции, определённую законом $\mathcal{E}_{si} = -L\,dI/dt.$, а учёт последнего в левой части соотношения (3.11) должен быть выполнен в соответствии с описанным выше правилом. После окончательного решения всей задачи выясняется истинное направление тока на рассматриваемом участке и истинное направление *Э.D.C.* самоиндукции.

Уравнения (3.10), (3.11) составляются при выполнении следующих условий, являющихся следствием законов Кирхгофа и позволяющих получить систему линейно независимых уравнений для определения токов на всех участках цепи:

- если в разветвлённой цепи имеется N узлов, то независимые уравнения типа (3.10) можно составить лишь для N-1 узлов;

- если в разветвлённой цепи можно выделить несколько замкнутых контуров, то независимые уравнения типа (3.11) можно составить только для тех контуров, в которых присутствует хотя бы один новый элемент (сопротивление, ёмкость, *Э.D.C.* любого типа), не встречающийся в уже рассмотренных контурах;

- если предположительное направление тока в цепи совпадает с выбранным направлением обхода, то соответствующее слагаемое $I_j R_j$ в уравнении (3.11)) надо брать со знаком плюс, если эти направления противоположные, то со знаком минус;

- в свою очередь слагаемое вида $\frac{q_m}{C_m}$ в (3.11) формируется следующим образом. Пусть выбрано направление обхода. Тогда, если конфигурация, состоящая из заряда пластин конденсатора q_m и направления обхода, совпадает с конфигурацией, указанной на рис.3.3, то соответствующее слагаемое имеет вид $\frac{q_m}{C_m}$, если совпадает с конфигурацией, указанной на рис. 3.4, то (-$\frac{q_m}{C_m}$).

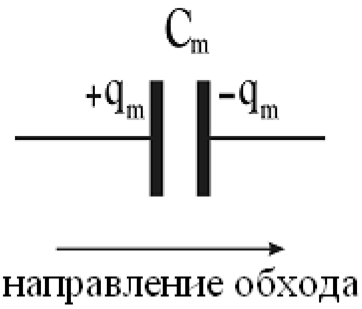

Рис. 3.3

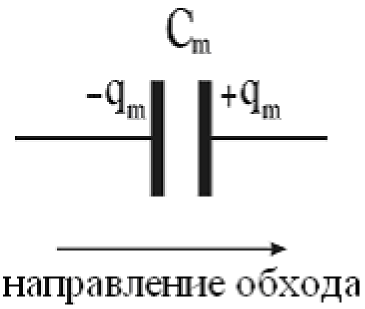

Рис. 3.4

В нестационарных процессах на обкладках конденсаторов, входящих в тот или иной контур электрической цепи, с течением времени изменяются величины электрических зарядов. Ток, протекающий по участку контура, в котором находится конденсатор, либо заряжает, либо разряжает его (рис.3.5 и 3.6) .

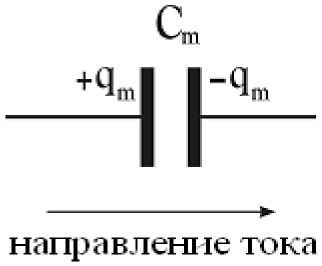

Рис. 3.5

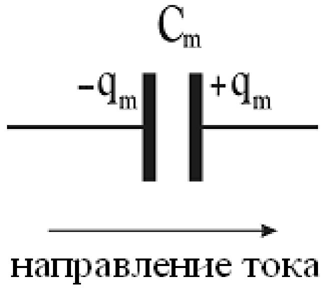

Рис. 3.6

В первом случае уравнение «сохранения» электрического заряда имеет вид

$$dq_m = I \cdot dt \ ,$$

поскольку такой ток увеличивает положительный заряд на соответствующей обкладке конденсатора, а во втором случае -

$$dq_m = -I \cdot dt \ ,$$

поскольку при этом положительный заряд «уходит» с соответствующей обкладки конденсатора.

Уравнение динамики, описывающее движение подвижной перемычки, и представленные выше уравнения, основанные на законах Кирхгофа, образуют замкнутую систему с заданными начальными условиями. При составлении уравнения динамики практически во всех задачах необходимо знать силу Ампера, действующую на подвижную часть контура (например, в декартовой системе координат):

$$\vec{F}_a = I\left[\vec{l} \times \vec{B}\,\right] = I \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_x & l_y & l_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{3.12}$$

Здесь I – ток, протекающий по перемычке, $\vec{l}$ – вектор, длина которого совпадает с длиной подвижной перемычки, а направление совпадает с выбранным направлением протекания тока. Следует отметить, что зависимость (3.12) справедлива, если выполнены следующие условия: $I = const$, B_x, B_y, B_z – постоянны и угол между векторами $\vec{l}$ и $\vec{B}$ одинаков вдоль всего подвижного участка цепи.

Примеры выполнения домашнего задания по теме “Электромагнитная индукция”.

Задача 3.1. По двум гладким медным шинам, установленным вертикально, в однородном магнитном поле $\vec{B}$, которое не изменяется с течением времени, скользит без трения под действием силы тяжести вдоль оси OY прямолинейная металлическая перемычка массы m. Во время движения перемычка остаётся параллельной самой себе и перпендикулярной направляющим шинам. В цепи содержится источник тока с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ и ключ K, который при его включении замыкает электрическую цепь. Вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля перпендикулярен плоскости рисунка. Параметры электрической цепи

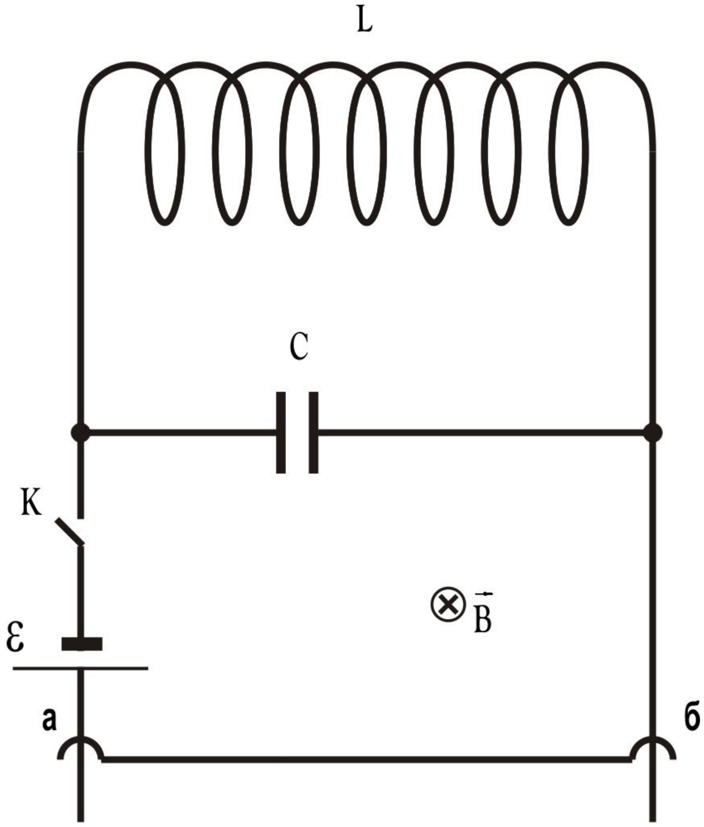

Рис. 3.7

приведены на рисунке 3.7. Расстояние между шинами равно постоянной величине l. Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы.

Внутренним сопротивлением источника тока и сопротивлением катушки пренебречь.

Найти закон изменения скорости движения перемычки при условии, что скорость движения перемычки и ток через перемычку в начальный момент времени равны нулю. Перемычка приходит в движение с одновременным замыканием ключа K.

Решение. Для определения величины потока Φ вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через плоскую поверхность, ограниченную рассматриваемой
цепью, выберем из соображений удобства расчётов направление вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости рисунка так, чтобы оно совпадало с направлением вектора индукции магнитного поля $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$ (тогда поток вектора $\vec{B}$ будет положительным).

Рассмотрим два независимых контура аСба и аLба (рис. 3.8). Потоки

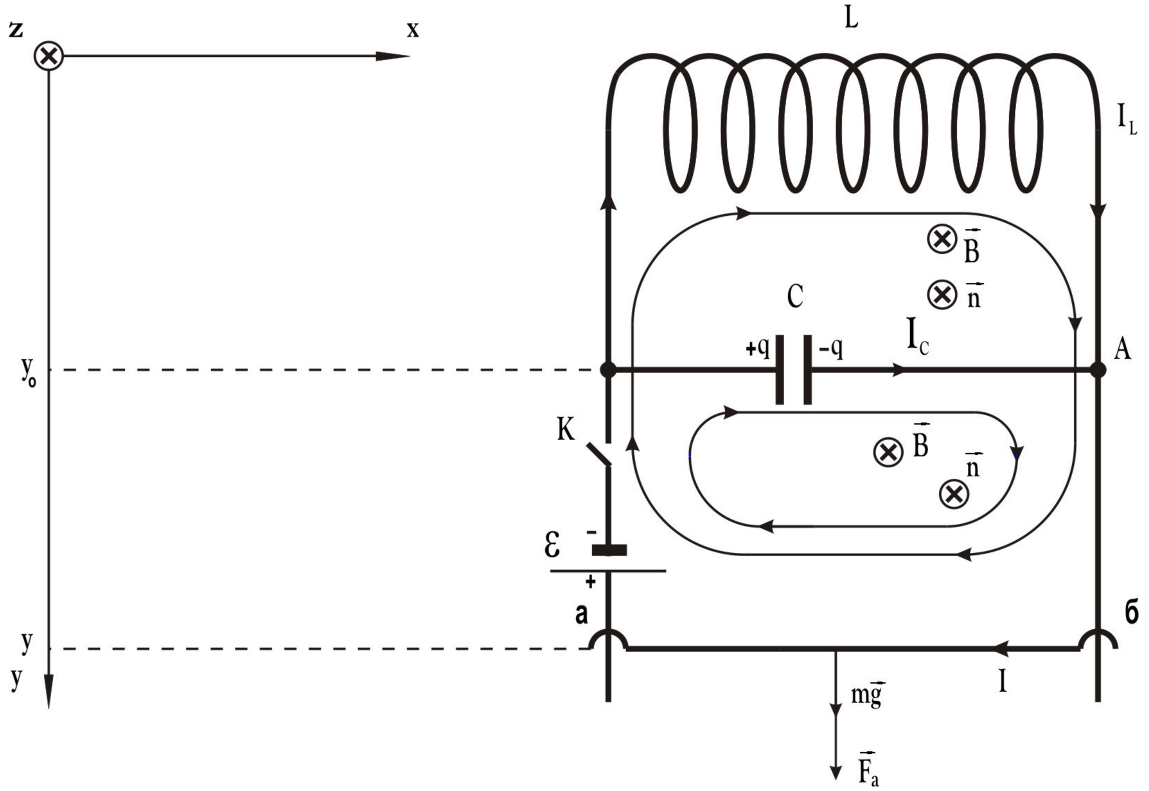

Рис. 3.8

вектора $\vec{B}$ через плоские поверхности, ограниченные этими контурами, будут соответственно равны

$$\Phi_1 = (\vec{B},\vec{n})l(y - y_0),$$

$$\Phi_2 = (\vec{B},\vec{n})\,l\,y.$$

Единственной величиной в этих выражениях, изменяющейся с течением времени, является вертикальная координата *y=y(t). Э.D.C.* индукции, обусловленные изменениями этих потоков, в соответствии с законом Фарадея равны

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -B \quad l \quad \frac{dy}{dt} = -B \quad l\upsilon_{y,} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -B \quad l \quad \frac{dy}{dt} = -B \quad l\upsilon_{y,} \quad , \tag{3.14}$$

где υ_y – проекция скорости перемычки на ось OY. Направления обхода указанных контуров аСба и аLба согласуем с выбранным направлением вектора нормали $\vec{n}$ правилом правого винта.

Тогда уравнения Кирхгофа (3.11) принимают вид:
для контура аСба

$$\mathcal{E}_{i1} - \mathcal{E} = +\frac{q}{C}, \tag{3.15}$$

для контура аLба

$$\mathcal{E}_{i2} - \mathcal{E} - L\frac{dI_L}{dt} = 0. \tag{3.16}$$

Для токов в контурах, например для узла А на рисунке 3.8, справедливо следующее уравнение баланса (3.10):

$$I = I_C + I_L. \tag{3.17}$$

Таким образом, электродинамические уравнения (3.15), (3.16), (3.17) с учётом соотношений (3.13) и (3.14), правила записи которых подробно рассмотрены в методических указаниях и теоретической части настоящего пособия, принимают вид:

$$-Bl\upsilon_y - \mathcal{E} = +\frac{q}{C}; \;\; -Bl\upsilon_y - \mathcal{E} - L\frac{dI_L}{dt} = 0. \;\; I_C + I_L = I. \tag{3.18}$$

Система уравнений (3.18) замыкается уравнением, связывающим ток I_C с зарядом пластины конденсатора q (см. рис. 3.8):

$$I_C = \frac{dq}{dt} \tag{3.19}$$

и динамическим уравнением, описывающим движение перемычки, которое в рассматриваемой задаче имеет вид:

$$m\frac{d\upsilon_y}{dt} = mg + F_{ay}. \tag{3.20}$$

Здесь F_{ay} – проекция силы Ампера (3.12), действующей на перемычку,

$$F_{ay} = I\,l\,B\;. \tag{3.21}$$

Уравнения (3.18), (3.19), (3.20) сведём в систему:

$$-B\,l\,\upsilon_y - \mathcal{E} \quad = +\frac{q}{C}, \tag{3.22}$$

$$-B\,l\,\upsilon_y - \mathcal{E} \quad - L\frac{dI_L}{dt} = 0, \tag{3.23}$$

$$I_C + I_L = I \tag{3.24}$$

$$I_C = \frac{dq}{dt}\;, \tag{3.25}$$

$$m\frac{d\upsilon_y}{dt} = mg + F_{ay}. \tag{3.26}$$

Исключая заряд q из уравнений (3.22) и (3.25), получим фактически зависимость ускорения перемычки от мгновенного значения силы тока через конденсатор:

$$-B\,l\frac{d\upsilon_y}{dt} = +\frac{I_C}{C}.$$

Далее, дифференцируя по времени t полученное соотношение, находим выражение для производной по времени от величины силы тока через конденсатор:

$$\frac{dI_C}{dt} = -B\,l\,C\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2}. \tag{3.27}$$

Из уравнения (3.23) определяем $\frac{dI_L}{dt}$:

$$\frac{dI_L}{dt} = -\frac{B\,l\,\upsilon_y + \varepsilon}{L} \tag{3.28}$$

Дифференцируя по t уравнение (3.24) и учитывая уравнения (3.27) и (3.28), получаем:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_C}{dt} + \frac{dI_L}{dt} = -B\,l\,C\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} - \frac{B\,l\,\upsilon_y + \varepsilon}{L}. \tag{3.29}$$

Дифференцируя по t уравнение (3.26), с учётом уравнения (3.21) для проекции скорости перемычки υ_y получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$m\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = l\,B\,\frac{dI}{dt}\,. \tag{3.30}$$

Объединяя два последних уравнения (3.29) и (3.30), получим уравнение для нахождения υ_y:

$$\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{L(m+B^2l^2C)}\upsilon_y = -\frac{\varepsilon l B}{L(m+B^2l^2C)}\,. \tag{3.31}$$

Заметим, что уравнение (3.31) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающее некоторый колебательный процесс.

Общее решение уравнения (3.31) имеет вид:

$$\upsilon_y(t) = C_1\cos\,\omega_0 t + C_2\sin\,\omega_0 t + \frac{-\varepsilon}{l\,B}\,, \tag{3.32}$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{B^2\,l^2}{L(m+B^2\,l^2\,C)}$ – квадрат частоты колебательного процесса перемычки.

Для определения констант интегрирования C_1 и C_2 необходимо выписать общее решение системы уравнений (3.22-3.26), поскольку скорость движения перемычки функционально связана с остальными искомыми переменными физическими параметрами системы. Соотношение (3.32) является частью общего решения системы уравнений (3.22-3.26). Для зависимости (3.32) очевидным условием является $\upsilon_y(0)=0$, поскольку движение перемычки начинается из состояния покоя. Это условие определяет значение константы интегрирования C_1:

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{B\cdot l}\,,$$

после чего зависимость скорости перемычки от времени приобретает вид:

$$\upsilon_y(t) = \frac{\varepsilon}{B\cdot l}\left(-1+\cos\,\omega_0 t\right) + C_2\sin\,\omega_0 t\,.$$

Из уравнения (3.22) находим зависимость заряда конденсатора от времени:

$$q = -\varepsilon\cdot C\cdot\cos\,\omega_0 t - B\cdot l\cdot C\cdot C_2\cdot\sin\,\omega_0 t.$$

В начальный момент времени величина заряда конденсатора равна величине $(-\varepsilon\cdot C)$. Этот результат не должен вызывать удивления: «включение» Э.Д.С. в отсутствие активного сопротивления в цепи конденсатора приводит к «мгновенному» установлению величины заряда последнего. Дифференцированием установленной зависимости по уравнению (3.25) находим выражение для величины тока I_C через конденсатор:

$$I_C = \omega_0 \cdot (\varepsilon \cdot C \cdot \sin \omega_0 t - B \cdot l \cdot C \cdot C_2 \cdot \cos \omega_0 t).$$

В начальный момент времени значение тока через конденсатор равно

$$I_C(0) = -\omega_0 \cdot B \cdot l \cdot C \cdot C_2 .$$

Обратим внимание читателя на то, что постоянная интегрирования C_2 оказывает влияние не только на величину скорости перемычки, но и на заряд конденсатора и ток через конденсатор. Рассматривая совместно уравнения (3.22) и (3.23), получаем уравнение

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{q}{L \cdot C},$$

в котором зависимость $q(t)$, $\forall t$ определена выше, что позволяет проинтегрировать это уравнение:

$$I_L = \frac{BlC_2 \cos \omega_0 t - \varepsilon \cdot \sin \omega_0 t}{\omega_0 L} + C_3 .$$

Обратим внимание читателя на появление ещё одной постоянной интегрирования C_3. Это легко понять, если заметить, что исходная система уравнений (3.22)-(3.26) содержит три дифференциальных уравнения первого порядка. В начальный момент времени ток через катушку индуктивности I_L равен $\frac{B \cdot l \cdot C_2}{\omega_0} + C_3$, т.е. определяется значениями двух постоянных интегрирования.

Располагая зависимостями от времени для тока через конденсатор и тока через катушку индуктивности, по уравнению (3.24) получаем после необходимых преобразований зависимость тока через перемычку:

$$I = \frac{m \cdot \omega_0}{B^2 \cdot l^2} \cdot (B \cdot l \cdot C_2 \cdot \cos \omega_0 t - \varepsilon \cdot \sin \omega_0 t) + C_3 .$$

Начальное значение тока через перемычку равно

$$I(0) = \frac{m\,\omega_0}{B \cdot l} \cdot C_2 + C_3 .$$

Таким образом, все искомые переменные задачи определены в общем виде (с точностью до определения констант интегрирования). При выводе зависимости скорости перемычки от времени нам пришлось дифференцировать исходное уравнение (3.26), при этом в окончательном результате исчезла постоянная величина ускорения свободного падения *g*. Необходимо убедиться, что полученное решение действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению для скорости перемычки. Проверка этого условия – оно должно выполняться для произвольного момента времени - приводит к соотношению:

$$C_3 = -\frac{g \cdot m}{B \cdot l}.$$

Итак, постоянная интегрирования C_1 нами определена единственным образом, постоянная интегрирования C_3 нами определена единственным образом, постоянная интегрирования C_2 пропорциональна электрическому току через конденсатор в начальный момент времени, она же участвует в формировании начального тока через катушку индуктивности и, таким образом, в формировании начального тока через перемычку. Формально её значение может быть произвольным. Физически допустимыми являются начальные условия, позволяющие однозначно определить значение постоянной интегрирования C_2 .

По условию задачи известно, что ток через перемычку в начальный момент времени равен нулю. Приравнивая выражение для $I(0)$ нулю, получаем

$$C_2 = \frac{g}{\omega_0}$$

После этого решение задачи приобретает окончательный вид:

$$\upsilon(t) = \frac{g}{\omega_0} \cdot \sin\omega_0 t - \frac{\varepsilon}{B \cdot l} \cdot (1 - \cos\omega_0 t)$$

$$q(t) = -C \cdot \left(\frac{B \cdot l \cdot g}{\omega_0} \cdot \sin\omega_0 t + \varepsilon \cdot \cos\omega_0 t \right)$$

$$I_C(t) = C \cdot (-B \cdot l \cdot g \cdot \cos\omega_0 t + \varepsilon \cdot \omega_0 \cdot \sin\omega_0 t)$$

$$I_L(t) = \frac{B \cdot l \cdot g}{L \cdot \omega_0^2} \cdot \cos\omega_0 t - \frac{\varepsilon}{L \cdot \omega_0} \cdot \sin\omega_0 t - \frac{m \cdot g}{B \cdot l}$$

$$I(t) = \frac{(1 - L \cdot C \cdot \omega_0^2)}{L \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{B \cdot l \cdot g}{\omega_0} \cdot \cos\omega_0 t - \varepsilon \cdot \sin\omega_0 t \right) - \frac{m \cdot g}{B \cdot l}.$$

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что при её решении потребовалось установить законы изменения с течением времени заряда конденсатора, тока через конденсатор и тока через катушку индуктивности. Заметим, что в практически интересных случаях задание начальных условий для параметров сложной электрической цепи может представлять определённые трудности.

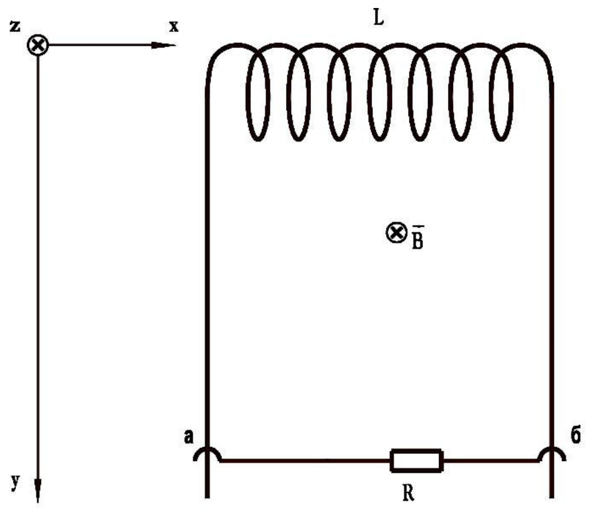

Рис. 3.9

Задача 3.2. По двум гладким медным шинам скользит перемычка массой M, закон движения которой задан функцией $y(t) = a\exp(-nt)$, где a и n – постоянные величины. Сопротивление перемычки равно R, поперечное сечение S, концентрация носителей заряда (электронов) в проводнике перемычки равна n_0.

Сверху шины замкнуты электрической цепью, содержащей индуктивность L в соответствии с рисунком 3.9. Расстояние l между шинами является постоянной величиной. Система находится в однородном переменном магнитном поле с индукцией $B_z(t) = C\exp(-mt)$, перпендикулярном плоскости, в которой перемещается перемычка, а C и m в законе изменения индукции магнитного поля являются положительными постоянными величинами. Сопротивление шин, скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Ток I через перемычку в начальный момент времени равен нулю.

Найти:

- закон изменения электрического тока с течением времени $I(t)$;
- закон изменения напряжённости электрического поля $E(t)$ в перемычке;
- силу $F_y(t)$, действующую на перемычку, необходимую для обеспечения заданного закона движения;
- связь между силой Ампера, действующей на перемычку, и силой Лоренца, действующей на электроны в перемычке.

Решение. Выберем направление единичной нормали $\vec{n}$ так, чтобы $\vec{n}\uparrow\uparrow\vec{B}$, тогда поток вектора $\vec{B}$ будет положительным (рис.3.10). Поток вектора $\vec{B}$ сквозь поверхность, натянутую на контур аLба, равен $\Phi = (\vec{B},\vec{n})\,ly$. *Э.Д.С.* индукции, обусловленная изменением этого потока, в соответствии с законом Фарадея равна:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[B_z(t)\cdot y(t)\cdot l]\,. \tag{3.34}$$

Направление обхода рассматриваемого контура аLба согласуем с выбранным направлением вектора нормали $\vec{n}$ правилом правого винта. Тогда уравнение Кирхгофа (3.11) применительно к данной задаче принимает вид:

$$\mathcal{E}_i - LdI/dt = IR. \tag{3.35}$$

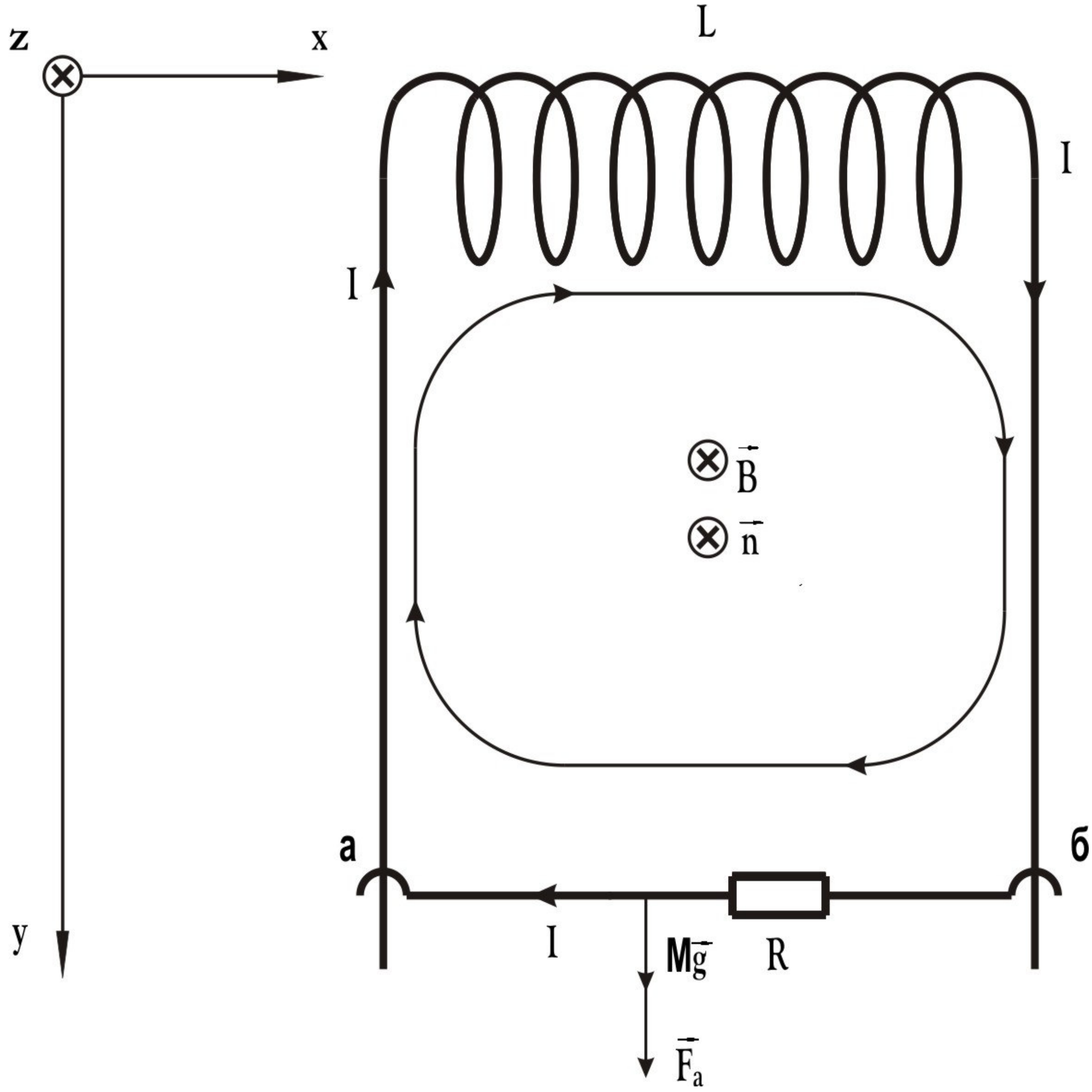

Рис.3.10.

Следует отметить, что в соотношении (3.35) ток I положительный, поскольку выбран так, что его направление совпадает с направлением обхода контура аLба. Так как в условии задачи заданы закон движения перемычки $y(t) = a\exp(-nt)$ и закон изменения магнитного поля $B_z(t) = C\exp(-mt)$, то значение *Э.Д.С.* индукции в соответствии с законом (3.1) равно

$$\mathcal{E}_i = alC(m+n)\exp(-(m+n)t). \tag{3.36}$$

Тогда для тока $I(t)$, протекающего в контуре аLба, с учётом выражения (3.36) для $\mathcal{E}_i$ получаем неоднородное дифференциальное уравнение с начальным условием $I(0) = 0$:

$$L\frac{dI}{dt} + IR = alC\,(m+n)\exp(-(m+n)t)\,. \tag{3.37}$$

При решении уравнения (3.37) воспользуемся методом Лагранжа. Решение однородного уравнения (3.37) запишем в форме

$$I(t) = A(t)\exp(-\frac{R}{L}t)\,. \tag{3.38}$$

Подставим (3.38) в исходное уравнение (3.37) и найдём значение $A(t)$:

$$A(t) = \frac{alC\,(m+n)}{R-(m+n)L}\exp\left\{\left[\frac{R}{L}-(m+n)\right]t\right\} + const\quad .$$

Тогда общее решение уравнения (3.37) примет вид

$$I(t) = const\;\exp(-\frac{R}{L}t) + \frac{alC(m+n)}{(R-(m+n)L)}\exp\{[-(m+n)]\,t\}. \tag{3.39}$$

В этом выражении $const$ определяем из начального условия $I(0)=0$:

$$const\;\; = -\frac{alC\,(m+n)}{R-(m+n)L}\,.$$

Частное решение уравнения (3.37) с нулевым начальным условием имеет вид

$$I(t) = \frac{alC(m+n)}{(R-(m+n)L)}\left\{\exp[-(m+n)t] - \exp\left[-\frac{R}{L}t\right]\right\}. \tag{3.40}$$

Динамическое уравнение движения перемычки в проекции на ось OY (аналог уравнения (3.20)) в рассматриваемом случае выглядит следующим образом:

$$M\,\frac{d\upsilon_y}{dt} = Mg\; + I\,l\,B_z + F_y(t), \tag{3.41}$$

где $I(t)$ определяется зависимостью (3.40), а $F_y(t)$ – проекция на ось y управляющей силы, действующей на перемычку. Из заданного условием задачи закона движения перемычки найдём производную по времени от проекции на ось OY скорости перемычки:

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = an^2\exp(-nt)\,.$$

Тогда проекция управляющей силы $F_y(t)$ из уравнения (3.41) с учётом последнего соотношения будет равна

$$F_y(t) = Man^2\exp(-nt) - Mg - I\,l\,B_z =$$
$$= Man^2\exp(-nt) - Mg - \frac{C^2 a\,l^2(m+n)}{(R-(m+n)L)}\left\{\exp[-(2m+n)t] - \exp\left[\left(-\frac{R}{L} - m\right)t\right]\right\}.$$

Плотность тока в перемычке определяется зависимостью

$$j = \frac{I(t)}{S}, \qquad (3.42)$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

Напряжённость электрического поля в перемычке определяем из закона Ома в дифференциальной форме

$$E = \frac{j}{\sigma} = j\rho_{уд}, \qquad (3.43)$$

где $\rho_{уд}$ –удельное сопротивление медной перемычки (находим по справочнику «Физические величины»).

Среднюю скорость $\langle\vec{u}\rangle$ направленного движения электрических зарядов, образующих электрический ток, находим из уравнения

$$\vec{j} = |e| n_0 \langle\vec{u}\rangle,$$

где $|e|$ –модуль заряда электрона, n_0 – объёмная концентрация носителей заряда. В этом случае справедливо соотношение

$$\langle u \rangle = \frac{j}{|e| n_0}, \qquad (3.44)$$

где плотность тока j в перемычке определена зависимостью (3.42), модуль заряда электрона $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Кл.$ Тогда полная скорость носителей зарядов (электронов) равна

$$\vec{\upsilon} = \langle\vec{u}\rangle + \vec{\upsilon}_n,$$

где $\vec{\upsilon}_n$ –скорость движения перемычки. При этом

$$\upsilon_{ny} = \frac{dy}{dt} = -an\exp(-nt)$$

-проекция скорости движения перемычки на ось $OY.$ Сила Лоренца, действующая на заряд, определяющий электрический ток, равна

$$\vec{F}_л = |e| \cdot [\vec{\upsilon} \times \vec{B}] = |e| \cdot [(\langle\vec{u}\rangle + \vec{\upsilon}_n) \times \vec{B}] = |e| \cdot [\langle\vec{u}\rangle \times \vec{B}] + |e| \cdot [\vec{\upsilon}_n \times \vec{B}]. \qquad (3.45)$$

Следует отметить, что векторы первого и второго слагаемых в последнем соотношении взаимно перпендикулярны. Тогда

$$F_л = |\,e\,| \cdot (([\langle\vec{u}\rangle \times \vec{B}])^2 + ([\vec{\upsilon}_n \times \vec{B}])^2)^{1/2} \ .$$

Сила Лоренца, действующая на все носители зарядов, равна

$$F^* = F_л S\,l\,n_0 = S\,l\,n_0 |\,e\,| \cdot (([\langle\vec{u}\rangle \times \vec{B}])^2 + ([\vec{\upsilon}_n \times \vec{B}])^2)^{1/2} \ . \qquad (3.46)$$

Сила Ампера, действующая на перемычку,

$$F_a = I\,l\,B_z \,.$$

Отношение этих сил с учётом соотношений $I = j \cdot S$, $j = n_0 \cdot |e| \cdot \langle u \rangle$ после соответствующих преобразований равно:

$$\frac{F_a}{F_л} = \frac{I\,l\,B_z}{S\,l\,n_0 |\,e\,| \cdot ([\langle\vec{u}\rangle \times \vec{B}]^2 + [\vec{\upsilon}_n \times \vec{B}]^2)^{1/2}} = \frac{n_0 \cdot |e| \cdot \langle u \rangle \cdot S \cdot B_z}{S\,l\,n_0 |\,e\,| \cdot ([\langle\vec{u}\rangle \times \vec{B}]^2 + [\vec{\upsilon}_n \times \vec{B}]^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\upsilon_n}{u}\right)^2}} \le 1.$$

В рассмотренных задачах закон электромагнитной индукции играет существенную роль. Электродинамическое уравнение (второй закон Кирхгофа), полученное с помощью этого закона, входит в общую замкнутую систему дифференциальных уравнений. Учёт начальных условий позволяет найти единственное решение поставленной задачи, обладающее физическим смыслом.